

Des faits !

La théorie du chaos et l'IMprédictibilité

• Introduction historique

Avant l'article révolutionnaire d'Edward Lorenz (cf. [1], 1963: l'effet papillon), mathématicien passionné de météorologie, l'aspect irrégulier, instable, voir désordonné de la nature était ignoré, ou pire, était perçu comme une monstruosité. La situation changea radicalement, lorsqu'un mathématicien des systèmes dynamiques (Smale, 1967: topologie de l'espace de phase), un physicien de la turbulence (Ruelle, 1971: l'attracteur étrange), un biologiste des populations (May, 1976: l'équation logistique), un géométricien touche-à-tout (Mandelbrot, 1977: la fractale) et un physicien théoricien (Feigenbaum, 1978: théorie universelle de la bifurcation), découvrirent chacun dans leur domaine, de « l'ordre dans le désordre ».

• L'effet "papillon": dépendance aux conditions initiales (cf. [2] p. 27 ss)

Sur un ordinateur préhistorique (nous sommes en 1960), LORENZ réussit à implémenter un programme rudimentaire de prévision météo, basé sur une douzaine de lois *déterministes*. Cela signifie qu'une connaissance *approximative* des conditions initiales ne conduit qu'à des influences *imperceptibles* sur le résultat final. Pour gagner du temps, il lança son programme à mi-chemin en introduisant manuellement les valeurs numériques intermédiaires d'une simulation complète. Cette nouvelle exécution aurait dû reproduire exactement l'ancienne. Or surprise, *les deux prévisions divergeaient rapidement*. Le problème provenait de l'arrondi: l'ordinateur travaillait avec 6 chiffres significatifs, alors que Lorenz n'avait introduit que des nombres à 3 chiffres, en supposant (robustesse déterministe) qu'une différence d'un millièbre serait sans conséquence. Il venait de mettre en évidence 1/ l'effet "papillon": tout système physique ayant un comportement *non-périodique* est par nature *imprévisible* et 2/ de "l'ordre déguisé en désordre": un comportement chaotique émerge d'un simple système *déterministe* décrit par des *équations non-linéaires* (cf. eq. logistique). La non-linéarité signifie que le fait de jouer modifie les règles du jeu, qui à leur tour, modifient la manière de jouer et engendrent la complexité.

Notre

existence

• Espace des phases et attracteur étrange (cf. [2] p. 172 ss)

Afin d'étudier ces comportements complexes, LORENZ mit au point un système chaotique expérimental (roue hydraulique) décrit par trois équations non-linéaires. Pour l'analyser, il fit appel à un espace abstrait aux dimensions multiples: "l'espace de phases". La courbe résultante - l'*orbite* - révélait à la fois un pur désordre (aucun point n'apparaît deux fois \Leftrightarrow aucune intersection de l'orbite) et un ordre insoupçonné (l'orbite décrit une sorte de double spirale infinie, confinée dans un espace fini i.e. *une fractale*). Cette orbite stable, de faible dimension et non périodique devint célèbre sous le nom d'*attracteur de Lorenz*.

Poursuivant les travaux novateurs de SMALE sur l'étude topologique des orbites chaotiques, RUELLE et TAKENS constatèrent que de nombreux phénomènes, perçus jusque-là comme du désordre (volute de fumée; tourbillon aquatique; tache rouge de Jupiter, [2] p. 77 ss), se comportaient comme s'ils étaient régulés par un modèle sous-jacent invisible: l'attracteur. "L'*attracteur étrange*" est une figure qui représente l'ensemble des orbites d'un système chaotique. Il révèle un ordre, une contrainte cachée, analogue à « une vallée dans l'espace des phases dont toutes les eaux (orbites) convergent vers un cours d'eau unique ».

• L'équation logistique: le flux et reflux de la vie (cf. [2] p. 97 ss)

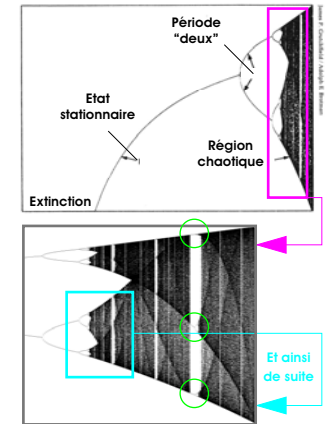
Avec MAY, le chaos envahit les sciences du vivant. Comment les diverses populations animales évoluent-elles, si les ressources viennent à manquer, si des prédateurs surviennent, si une épidémie se déclare ? Pour y répondre des biologistes férus de mathématiques créèrent des modèles simples. Le plus simple est l'*équation malthusienne* (démographie croissant indéfiniment, sans aucune contrainte alimentaire, morale ou territoriale): $x_{n+1} = f \cdot x_n$ (population nouvelle = *facteur de croissance* x population ancienne). Mais ce modèle n'est pas réaliste, car il ne tient pas compte des dures réalités de l'existence (famines, guerres, maladies, épidémies, ...) qui freinent la croissance. Ils incorporèrent donc dans l'équation un *facteur de freinage* (lorsque la population augmente, la valeur de ce facteur diminue): $x_{n+1} = f \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$. Cette équation non-linéaire - dite *équation logistique* - est construite par itérations successives.

Emergence d'un paradigme qui « réenchante » le monde.

Leur interprétation ?

• Diagramme de bifurcation: visualisation du chaos (cf. [2] p. 100 ss; 218 ss)

La meilleure manière de présenter la complexité surprenante contenue dans l'*équation logistique* (lire compléments 10e/f) est le *diagramme de bifurcation*: à chaque bifurcation, la période double (la population oscille entre 2 fois plus d'états finaux), double encore, et de manière exponentielle, atteint une quasi-infinité d'états possibles (zones sombres). Puis réapparaissent des zones de stabilité (bandes blanches verticales): la population redevient prévisible (*attracteur ternaire*), puis le doublement recommence et le chaos se réinstalle. En plus, cette figure est *une fractale*: en zoomant sur n'importe quelle partie, on retrouve une structure identique de zones alternativement sombres et blanches (*invariance d'échelle*). Cette équation possède d'innombrables applications (occurrence de mutations, propagation d'une rumeur, théories de l'apprentissage, ...).



• Définition du chaos

Le chaos caractérise l'état d'un système dont le comportement 1/ ne se répète jamais (et semble erratique), 2/ possède une dépendance sensible par rapport aux conditions initiales (de minuscules variations initiales conduisent à des résultats divergents), 3/ n'en est pas moins *ordonné* et caractérisé par un *déterminisme imprévisible* (un système non-linéaire, ayant des équations de mouvement identiques et les mêmes conditions initiales, peut déboucher sur des résultats imprédictibles). **Le chaos n'est donc pas chaotique!**

a-t-elle

un SENS?

• En guise de conclusion provisoire

Depuis le fameux « effet papillon » qui affirme que le battement d'aile d'un papillon ici peut déclencher un cyclone aux antipodes, la théorie du chaos n'a cessé de se ramifier: en physique principalement, dans les sciences appliquées et du vivant, et plus récemment, en sciences sociales (Mark Michaels), économiques (William Baumol) et politiques (Alvin Saperstein). Elle abat les cloisons entre les diverses disciplines et enflamme aussi l'imagination du public, car elle se préoccupe d'objets du quotidien et à taille humaine (Comment se forment les nuages? Les arythmies cardiaques et les oscillations du cerveau obéissent-elles à des règles? Pourquoi et à quel moment l'écoulement de l'eau d'un robinet atteint-il son seuil de turbulence? Qu'est-ce qui peut bien influencer sur les volutes irrégulières d'une fumée de cigarette? ...).

Défiant la méthodologie scientifique classique, la théorie du chaos permet d'énoncer de nouvelles idées sur le comportement universel de la complexité et l'apparition de l'ordre, sur les limites du déterminisme et le fondement du libre-arbitre, sur l'évolution de la vie et la nature de la conscience. L'auto-organisation de la matière et l'auto-similarité des fractales, donne à penser que l'Univers n'est pas absurde que son évolution a un sens (cf. [3]).

Si la relativité dissipe l'illusion newtonienne d'un espace et d'un temps absolu (cf. poster n°1); si la théorie quantique détruit le rêve newtonien d'un processus de mesure contrôlable (cf. posters n° 2 à 4); le chaos quant à lui, élimine l'utopie laplacienne d'une prédictibilité déterministe et s'attaque au réductionnisme en privilégiant une approche globale.

• Pour aller plus loin

cf. compléments

- [1] E. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow", Journal of the Atmospheric Sciences, n°20, 1963.
- [2] J. Gleick, "La théorie du chaos", Albin Michel, 1989.
- [3] Trinh Xuan Thuan, "Le chaos et l'harmonie", Fayard, 1998.
- [4] http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/index.html; consulté le 11.07.07

Groupe de branche de CHIMIE du LCC en collaboration avec le prof. Jean Staune

N°10 A suivre...

Complément 10a

L'effet papillon et l'attracteur de Lorenz

• Divergence entre deux évolutions météo (cf. [2] p. 34)

Edward Lorenz vit sa météo numérique, partant pratiquement du même point, suivre des évolutions temporelles de plus en plus divergentes jusqu'à la disparition de toute ressemblance entre elles (figure obtenue d'après des listages de Lorenz datant de 1961).

• L'attracteur de Lorenz: l'ordre dans le chaos (cf. [2] p. 48)

Les trois équations non-linéaires de trois variables sont les suivantes:

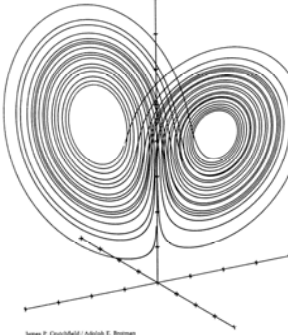
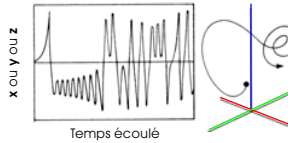
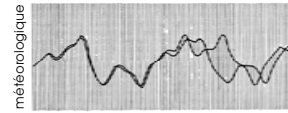
$$dx/dt = 10(y - x) \quad dy/dt = -xz + 28x - y \quad dz/dt = xy - (8/3)z$$

A chaque itération, ce système d'équation (dit de Lorenz) donne trois nombres (x;y;z): (0;10;0), (4;12;0), (9;20;0), (16;36;2), etc...

Traditionnellement, on pouvait visualiser les variations de chacune des variables à l'aide de ce que l'on appelle une représentation en fonction du temps (figure en haut à gauche).

Mettre en évidence la relation entre les trois variables nécessitait une autre technique. Les valeurs des trois variables déterminent à chaque instant la position d'un point dans l'espace tridimensionnel; à mesure que le système évolue, le mouvement de ce point représente ces trois variables dans leur variation continue (en haut à droite).

L'image magique ainsi obtenue (en bas), ressemblant à une face de hibou ou à des ailes de papillon, est devenue un emblème pour les premiers explorateurs du chaos. Elle révéla la délicate structure qui se dissimulait dans un flot de données incohérent. Comme l'évolution du système ne se reproduit jamais identiquement à elle-même, la trajectoire ne se recoupe jamais (**chaos**). Elle s'enroule en fait éternellement sur elle-même (**ordre**). Si ce mouvement sur l'attracteur est abstrait, il donne cependant une idée du mouvement du système réel. Le passage d'une aile de l'attracteur à l'autre correspond p. ex. à l'inversion du sens de rotation de la roue hydraulique de Lorenz.



Complément 10c

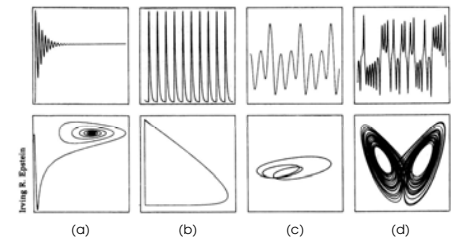
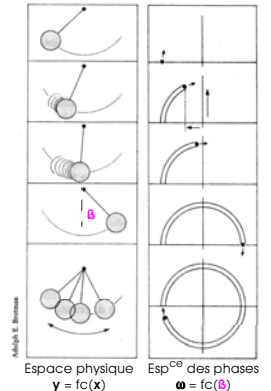
L'espace des phases: une autre façon de représenter un système dynamique

Il est possible de suivre l'évolution temporelle de l'état d'un système. On construit d'abord un modèle (via des équations différentielles) avec les lois physiques et les paramètres nécessaires et suffisants pour caractériser le système. On définit ensuite un point dans un "repère" ad hoc qui caractérise l'état du système à un instant donné. Ce repère est appelé "l'espace des phases". Lorsque le temps s'écoule, le point figurant l'état du système décrit une courbe appelée orbite (cf. [2] p. 74 & 176).

Attention, il n'existe aucune relation entre un espace physique bidimensionnel et un cas d'espace des phases à 2 dimensions. Il s'agit là d'un espace purement mathématique qui comporte autant de dimensions qu'il y a de paramètres dans le système dynamique étudié. Aussi compliqué que soit le système étudié, aussi baroque que soit le décor, aussi nombreux que soient les acteurs, un seul point dans cet espace abstrait suffit à représenter la totalité d'un système.

Pour un pendule simple, il suffit de connaître deux nombres, la vitesse angulaire " ω " et la position angulaire " β " du pendule. Un point de l'espace des phases (à droite) donne à chaque instant toute l'information sur l'état du système dynamique (à gauche) et notamment sa position (x,y).

Le système (a) converge vers un état d'équilibre après maintes oscillations (en haut), ce qui correspond dans l'espace des phases (en bas) à une orbite avec des boucles qui convergent vers un point: l'*attracteur de point stable*. Le système (b) se répète périodiquement, ce qui correspond à une orbite cyclique: l'*attracteur périodique*. Le système (c) a un mouvement périodique plus complexe, il se répète seulement après trois oscillations différentes. Cela correspond à une orbite fermée ternaire. Le système (d) est chaotique, son orbite possède la forme en aile de papillon de l'*attracteur étrange* de Lorenz.



Complément 10b

Système linéaire et système non-linéaire

Un système physique est dit "**linéaire**" quand le tout est exactement égal à la somme des composants. Ni plus, ni moins. Dans un tel système, la somme de causes produit une somme correspondante d'effets, et il suffit d'étudier séparément les comportements individuels des composants, puis de les additionner, pour déduire le comportement du tout.

Des phénomènes aussi divers que la trajectoire d'un obus de canon, la croissance d'une plante, la combustion du charbon et le rendement d'une machine peuvent être décrits à l'aide d'équations linéaires dans lesquelles de petites modifications entraînent de petits effets et où de grands effets s'obtiennent par l'addition de petites modifications.

Les équations non linéaires s'appliquent de manière spécifique aux éléments discontinus tels que les explosions, les cassures brusques des matériaux et les grands vents.

Avec les équations linéaires, la solution permet de généraliser d'autres solutions; ce n'est pas le cas avec les équations non linéaires. Bien qu'elles partagent certaines qualités universelles, les solutions non linéaires tendent à être obstinément individuelles et particulières. Contrairement aux courbes régulières obtenues par les élèves des classes de mathématiques du secondaire lorsqu'ils représentent des équations linéaires, la représentation d'équations non linéaires comprendra des cassures, des boucles, des récursions - toutes sortes de turbulences.

En injectant différentes valeurs dans des équations non linéaires, les scientifiques étudiant la théorie des systèmes parviennent à représenter les effets que diverses politiques et stratégies auraient sur l'évolution des villes, la croissance d'une société ou le fonctionnement d'une économie. A l'aide de modèles non linéaires, il est possible de localiser dans de tels systèmes des points critiques, au niveau desquels une modification infime peut avoir un impact d'une importance disproportionnée.

Complément 10d

Les découvertes de Mandelbrot: invariance d'échelle & fractale

• De l'ordre dans le chaos: l'invariance d'échelle

En passant au crible les oscillations du prix du coton de 1900 à 1960, MANDELBROT découvrit un résultat incroyable. Ces nombres, aberrants du point de vue de la distribution normale (courbe de Gauss), engendraient une symétrie du point de vue de l'*invariance d'échelle*. Chaque variation de prix était aléatoire et imprévisible, mais leur succession était indépendante de l'échelle: les courbes des fluctuations quotidiennes et mensuelles concordaient parfaitement. Le degré de variation était resté constant sur une période tumultueuse de soixante ans qui avait connu deux guerres mondiales et une dépression.

Des données les plus incohérentes (bruits électroniques, mots d'un texte, débits fluviaux) recèlent une forme d'ordre inattendu, qui reproduit une construction mathématique du XIX^e siècle: l'*ensemble de Cantor*. Prenez un segment de droite, ôtez le tiers du milieu et réitérez le processus. Vous obtenez une poussière de bâtonnets répartis par paquets infiniment nombreux, infiniment clairsemés, dans un espace fini.

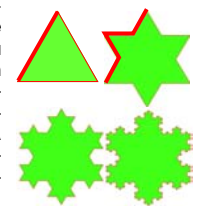


• Une géométrie de la Nature: la fractale

Ces phénomènes n'ont pas leur place dans la géométrie classique qui ne considère qu'un nombre entier de dimensions: point (0), cercle (1), disque (2) et sphère (3). Une nouvelle géométrie est donc nécessaire pour visualiser la complexité: la *géométrie fractale*. En partant d'un objet graphique, une fractale est obtenue en appliquant une transformation qui ajoute un élément de complexité, puis en réitérant à l'infini ce processus. La transformation du "flocon de Koch" consiste à remplacer le tiers central de chaque segment par 2 segments de même longueur. A n'importe quel grossissement, on observe la même structure, il est donc impossible, sur un détail, de connaître le grossissement, c'est l'invariance d'échelle. Le périmètre tend vers l'infini, bien que la surface reste bornée. La dimension vaut 1.26.

Les formes naturelles sont intimement liées aux structures fractales (flocons de neige, choux-fleurs, éponges, côtes, distribution des galaxies, notes d'une composition musicale, ...). Une organisation fractale contrôle les structures à tous les niveaux du corps humain (p. ex. le rapport d'homothétie des poumons vaut 2.5). Les fractales donnent lieu à d'innombrables utilisations pratiques (création de polymères, modélisation en soufflerie ou bassin, contact des surfaces, images virtuelles, ...).

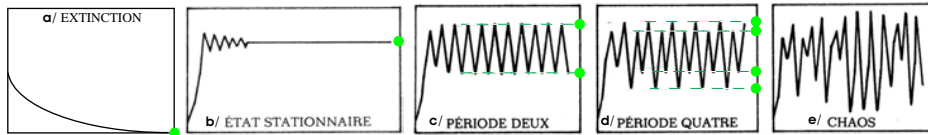
[5] B. Mandelbrot, "Les objets fractals: forme, hasard et dimension", Flammarion, 1977.



Complément 10e

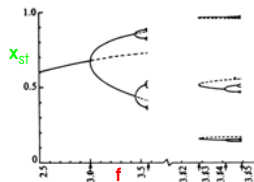
L'équation "logistique": le déterministe engendre le chaos

A l'aide d'un ordinateur, on effectue très facilement de nos jours, l'itération de l'équation non-linéaire logistique: $x_{n+1} = f \cdot x_n (1 - x_n)$. En variant le paramètre "f", on obtient les résultats graphiques suivants:



- a/ lorsque le **facteur de croissance "f"** est faible (< 1), la **population "x"** s'éteint.
- b/ tant que **"f"** reste modéré (entre 1 et 3), une population importante décline aux 2/3 de sa taille originale, puis se stabilise. De même une population très faible croît jusqu'à cette même limite. A partir de 2.5 apparaît une légère oscillation, mais qui converge vers 66% (existence d'un attracteur).
- c/ lorsque **"f"** dépasse la valeur 3 (correspondant à un triplement de la population chaque année), l'attracteur situé à 0.66 devient instable et se dédouble et la population se met à osciller entre deux valeurs distinctes d'une année sur l'autre.
- d/ lorsque **"f"** dépasse 3.4495 une seconde bifurcation (embranchement) apparaît; l'oscillation devient quadruple (la population prend successivement quatre valeurs différentes revenant une fois tous les quatre ans). Les dédoublements se poursuivent et surviennent de plus en plus fréquemment (8 à 3.5441, puis 16 à 3.5644, ...). Les cycles s'allongent de plus en plus à mesure que **"f"** augmente.
- e/ lorsque le **"f"** atteint 3.57, cette régularité disparaît pour laisser la place au chaos. Pourtant, au sein de ce chaos, l'ordre n'est pas complètement banni: des cycles totalement chaotiques sont invariablement accompagnés d'autres parfaitement réguliers.

MAY fit une synthèse partielle en construisant un diagramme de la **population stabilisée "x_{st}"** en fonction du taux de croissance **"f"** (cf. [2] p. 107). Il démontra ainsi qu'**un modèle déterministe simple peut engendrer de l'aléatoire**. Feigenbaum précisa encore ce résultat (cf. complément 10f).

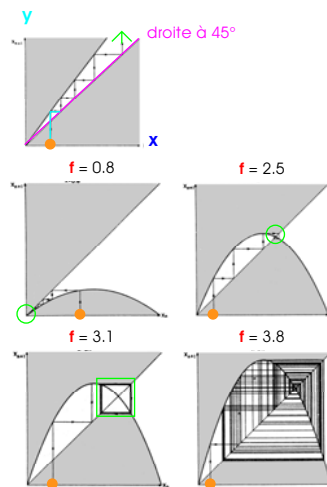


Complément 10f

L'équation "logistique": le chaos devient prédictible

FEIGENBAUM montra qu'une équation non-linéaire peut converger vers le chaos, par itération de plusieurs fonctions élémentaires, prenant un nombre à l'entrée et rendant un autre à la sortie.

On peut visualiser graphiquement de telles fonctions en reportant l'entrée sur l'abscisse et la sortie sur l'ordonnée. A chaque entrée $x = x_n$ correspond une seule sortie $y = x_{n+1}$, et l'ensemble de ces deux nombres détermine une forme représentée par les courbes ci-contre en trait gras. On part d'une valeur arbitraire de x_0 . Chaque valeur de y étant réinjectée dans la même fonction, il est possible d'utiliser un raccourci graphique: la trajectoire "rebondit" sur la droite à 45 degrés, pour laquelle x égale y .



La 1^{ère} figure correspond au scénario malthusien de croissance continue et illimitée. Les autres figures illustrent des scénarii plus réalistes intégrant un facteur de freinage. Elles correspondent à l'équation "logistique": une parabole parfaite définie par la fonction $y = f \cdot x \cdot (1 - x)$, où la valeur **"f"**, comprise entre 0 et 4, détermine la pente de la parabole. En fait, l'équation choisie n'a pas d'importance pour autant que la fonction possède une "arche".

Par contre, **le résultat final** dépend de manière très sensible de la pente qui correspond au degré de non-linéarité. Une fonction trop aplatie ($f < 1$) entraîne une extinction. L'accroissement de la pente ($1 < f < 3$) fait apparaître l'équilibre stationnaire qu'attend un écologiste traditionnel - un *attracteur de point stable*. Au-delà d'un certain point ($f > 3.45$), une *bifurcation* fait osciller le résultat avec une période double - un *attracteur périodique*. Il apparaît ensuite d'autres *dédoublements de période*, puis ($f > 3.57$) la trajectoire ne présente plus aucun équilibre: le chaos est atteint.

A partir de tels figures, FEIGENBAUM découvrit un *invariant d'échelle*: le rapport entre deux intervalles successifs de bifurcation $(y_n - y_{n-1}) / (y_{n+1} - y_n)$ tend vers **4.6692...** quelle que soit l'équation "à arche" choisie. **Cette constante de Feigenbaum permet de prédire quand le chaos arrive dans un système.**